

## التعداد

### تمارين و حلول

#### تمرين 1

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كما يلي أربعة كرات حمراء 3 منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم 2 و خمسة كرات خضراء 3 منها تحمل الرقم 2 ، واثنين منها تحمل الرقم 1، و كرة واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات.

1- حدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

2- حدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$  مع العلم أن العدد  $a$  يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و  $b$  يمثل رقم الكرة الثانية و  $c$  يمثل الكرة الثالثة.

#### تمرين 2

من مؤسسة ثانوية ثانوية تأهيلية تحتوي على  $n$  شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من  $p$  شخصا حيث  $2 \leq p \leq n$

1- ما هو عدد المجالس الممكن تكوينها في الحالات التالية:

أ- مجلس يضم المدير و الناظر

ب- مجلس لا يضم المدير و الناظر

ت- مجلس يضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا

2- استنتج أن  $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

#### تمرين 3

(1) بين بالترجع أن  $\sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) استنتج قيمة المجموع  $S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))$

#### تمرين 4

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  حيث  $n \geq 2$ . نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب  $f'(x)$  بطريقتين مختلفتين

استنتج المجامع التالية  $A = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k$   $B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k$   $C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k$

#### تمرين 5

نعتبر صندوقا يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات

تحمل الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 .

نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- أحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 3 كرات بيضاء و كرتين حمراويين.

2- أحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.

- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

#### تمرين 6

في مكتب جمعية يتكون من 15 عضوا ، 6 إناث و 9 ذكور .

نريد أن نختار عشوائيا رئيس و نائبه و كاتب عام و أمين المال.

1- ما هو عدد الإمكانيات الممكنة ؟

2- ما هو عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث؟

#### تمرين 7

لتكن  $E$  و  $F$  مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث  $cardE = cardF = n$

1- بين أن عدد الأزواج  $(X;Y)$  من  $[P(E)]^2$  بحيث  $X \cup Y = E$  و  $n \geq 2$  هو  $3^n$

2- أحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء  $E \cup F$  المكونة من  $n$  عنصر. و استنتج أن

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2$$

$$\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k \left(C_n^k\right)^2 \quad \text{استنتج أن}$$

**تمرين 8**

أحسب المجاميع التالية

$$S_{(n;p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} \quad \text{و} \quad S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i \quad \text{و} \quad S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i$$

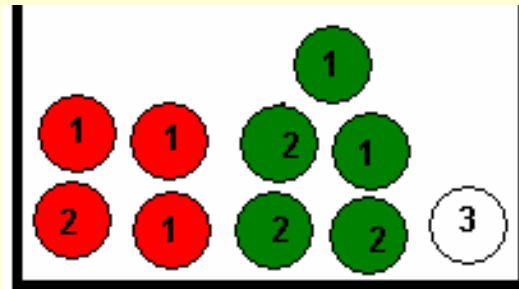
**تمرين 9**

لتكن  $E$  مجموعة منتهية حيث  $\text{card}E = n \geq 2$

حدد عدد التطبيقات  $f$  المعرفة من  $E$  نحو  $E$  حيث  $\text{card}[f(E)] = \frac{n}{2}$

**حل**

**حل تمرين 1**



نسحب عشوائيا من الصندوق بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات.

1- نحدد عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1

هذه السحبات ستكون على شكل  $R_1 R_1 X$  أو  $\overline{R_1} R_1 X$

عدد السحبات الممكنة حيث الكرة الثانية تكون حمراء و تحمل الرقم 1 هي:

$$A_7^1 \cdot A_3^1 \cdot A_8^1 + A_3^2 \cdot A_8^1 = 216$$

2- نحدد عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$  مع العلم أن العدد  $a$  يمثل رقم الكرة الأولى المسحوبة و  $b$  يمثل رقم الكرة الثانية و  $c$  يمثل الكرة الثالثة.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{تقبل حلين مختلفين في } \mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \quad \text{أي} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 > ac$$

إذا كان  $b = 1$  فإن  $\frac{1}{4} > ac$  وهذا غير ممكن لأن  $a \geq 1$  و  $c \geq 1$

إذا كان  $b = 2$  فإن  $1 > ac$  غير ممكن

إذا كان  $b = 3$  فإن  $\frac{9}{4} > ac$

ومنه  $(a; b; c) = (1; 3; 1)$  أو  $(a; b; c) = (1; 3; 2)$  أو  $(a; b; c) = (2; 3; 1)$

إذن عدد السحبات الممكنة بحيث المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$  هي:

$$A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 + A_4^1 \cdot A_1^1 \cdot A_5^1 + A_5^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1 = 60$$

### حل تمرين 2

من مؤسسة ثانوية تأهيلية تحتوي على  $n$  شخصا، نريد أن نختار مجلسا مكونا من  $p$  شخصا حيث  $2 \leq p \leq n$

-1

a. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر هو  $C_{n-2}^{p-2}$

b. عدد المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر هو  $C_{n-2}^p$

c. عدد المجالس الممكنة التي تضم المدير أو الناظر و ليس الاثنين معا هو  $C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} = 2C_{n-2}^{p-1}$

-2 نستنتج أن  $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

عدد المجالس المكونة من  $p$  شخص من بين  $n$  شخص هو  $C_n^p$  لدينا المجالس المكونة من  $p$  شخص من بين  $n$  شخص هو مجموع المجالس الممكنة التي تضم المدير و الناظر و المجالس الممكنة التي لا تضم المدير و الناظر و ليس الاثنين معا.

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

### حل تمرين 3

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$$

من أجل  $n=1$  لدينا  $C_{1+2}^3 = C_3^3 = 1$  و  $\sum_{p=1}^{p=1} C_{p+1}^2 = C_2^2 = 1$  إذن العبارة صحيحة من أجل  $n=1$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+3}^3 \quad \text{لنبين أن} \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3$$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} C_{p+1}^2 = C_{n+1+1}^2 + \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{p=n} C_{p+1}^2 = C_{n+2}^3 \quad \text{إذن}$$

(2) نستنتج قيمة المجموع  $S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))$ :

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n(n+1))}{2} = C_{n+2}^3 \quad \text{أي}$$

$$S = 2C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{إذن}$$

### حل تمرين 4

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  حيث  $n \geq 2$ . نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = (x+1)^n$

بعد حساب  $f'(x)$  بطريقتين مختلفتين

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k \quad B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k \quad A = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k$$

نستنتج المجامع التالية

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = (x+1)^n$$

لدينا

$$(f(x))' = \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

لدينا

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k = A \quad \text{بوضع} \quad x=1 \quad n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1} \quad \text{ومنه}$$

$$B = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1)C_n^k = n + \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = n + n2^{n-1} + 2^n$$

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)C_n^k = 2n + 2 \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2n + n2^n + 2^n$$

### حل تمرين 5

صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات تحمل الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- نحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 3 كرات بيضاء و كرتين حمراوين.

$$C_5^3 A_5^3 A_5^2 = \frac{60}{3!} \times 60 \times 20 = 12000 \quad \text{هو عدد هذه السحبات}$$

2- نحسب عدد السحبات الممكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.

- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

$$C_5^1 A_2^1 A_4^4 + C_5^1 A_1^1 C_4^3 A_4^3 A_8^1 = 240 + 160 = 400 \quad \text{هو عدد هذه السحبات}$$

### حل تمرين 6

1- عدد الإمكانيات الممكنة هو  $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = \dots$

2- عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث هو  $A_9^4 + A_9^2 \times A_6^2$

### حل تمرين 7

لتكن  $E$  و  $F$  مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث  $\text{card}E = \text{card}F = n$

3- نبين أن عدد الأزواج  $(X; Y)$  من  $[P(E)]^2$  بحيث  $X \cup Y = E$  و  $n \geq 2$  هو  $3^n$

نضع  $\text{card}X = p$  بما أن  $X \cup Y = E$  فإن  $Y = \bar{X} \cup A$  حيث  $A \in P(X)$

ومنه عدد المجموعات الجزئية  $Y$  حيث  $X \cup Y = E$  هو عدد عناصر  $P(X)$  أي  $2^p$

و بما أن عدد أجزاء  $E$  التي رئيسها  $p$  هو  $C_n^p$  فإن عدد الأزواج  $(X; Y)$  حيث  $\text{card}X = p$

$$\text{هو} \quad C_n^p 2^p$$

و حيث أن  $p \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$  فإن عدد الأزواج  $(X; Y)$  حيث  $X \cup Y = E$  هو

$$\sum_{p=0}^n C_n^p 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

4- نحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء  $E \cup F$  المكونة من  $n$  عنصر. و نستنتج أن

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{2n}{k}$$

\*- بما أن  $\text{card}(E \cup F) = 2n$  فإن عدد أجزاء  $E \cup F$  المكونة من  $n$  عنصر هو  $C_{2n}^n$

\*- كل جزء من  $E \cup F$  يكون مكون من  $k$  عنصر من  $E$  و  $n-k$  عنصر من  $F$  حيث

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من  $k$  عنصر من  $E$  هو  $C_n^k$

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من  $n-k$  عنصر من  $F$  هو  $C_n^{n-k} = C_n^k$

عدد أجزاء  $E \cup F$  المكونة من  $n$  عنصر يحتوي على  $k$  عنصر من  $E$  و  $n-k$  عنصر من  $F$

$$\text{هو } C_n^k \times C_n^{n-k} = (C_n^k)^2 \text{ حيث } k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 \text{ إذن عدد أجزاء } E \cup F \text{ المكونة من } n \text{ هو}$$

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 \text{ ومنه نستنتج أن}$$

$$\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2 \text{ * نستنتج أن}$$

$$S = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2 \text{ نضع}$$

$$S = 0.(C_n^0)^2 + 1.(C_n^1)^2 + \dots + (n-1).(C_n^{n-1})^2 + n.(C_n^n)^2$$

$$S = n.(C_n^n)^2 + (n-1).(C_n^{n-1})^2 + \dots + 1.(C_n^1)^2 + 0.(C_n^0)^2$$

$$S = n.(C_n^0)^2 + (n-1).(C_n^1)^2 + \dots + 1.(C_n^{n-1})^2 + 0.(C_n^n)^2 \text{ لأن } C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$2S = n.(C_n^0)^2 + n.(C_n^1)^2 + \dots + n.(C_n^{n-1})^2 + n.(C_n^n)^2$$

$$2S = n \left( (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2 \right) = n C_{2n}^n$$

$$\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k (C_n^k)^2 \text{ إذن}$$

### حل تمرين 8

$$S_{(n,p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} \text{ و } S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i \text{ و } S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \text{ نحسب المجاميع التالية}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i} \text{ * نعلم أن}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0 \text{ ونضع } a = -1 \text{ و } b = 1$$

$$\frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{1}{i+1} \times \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!(i+1)!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{i+1} \text{ * لدينا}$$

$$S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n C_{n+1}^{i+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^i$$

ومنه

$$S'_n = \frac{1}{n+1} \left( -C_{n+1}^0 + \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \right)$$

$$S'_n = \frac{1}{n+1}(-1+2^{n+1}) \text{ فان } \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i = 2^{n+1} \text{ أن حيث أن}$$

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \times \frac{(n-i)!}{(n-i-p+i)!(p-i)!} = \frac{n!}{i!} \times \frac{1}{(n-p)!(p-i)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{i!(p-i)!} \text{ لدينا } *$$

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_n^p C_p^i \text{ أي أن}$$

$$S_{(n,p)} = \sum_{i=0}^p C_n^i \cdot C_{n-i}^{p-i} = \sum_{i=0}^p C_n^p C_p^i = C_n^p \sum_{i=0}^p C_p^i = 2^p C_n^p = 2^p \times \frac{n!}{(n-p)!p!} \text{ وبالتالي}$$

### حل تمرين 9

لتكن  $E$  مجموعة منتهية حيث  $\text{card}E = n \geq 2$

نحدد عدد التطبيقات  $f$  المعرفة من  $E$  نحو  $E$  حيث  $\text{card}[f(E)] = \frac{n}{2}$  ( $n$  زوجي)

نعتبر  $F = \{y_1; y_2; \dots; y_{\frac{n}{2}}\}$  و  $Y_i = \{\varphi / \forall x \in E; \varphi(x) \neq y_i\}$  حيث  $\varphi$  تطبيق من  $E$  نحو  $F$

لدينا  $\varphi \in Y_i \Leftrightarrow \varphi$  تطبيق من  $E$  نحو  $F - \{y_i\}$

عدد التطبيقات المعرفة من  $E$  نحو  $F - \{y_i\}$  هو  $\left(\frac{n}{2} - 1\right)^n$

$y_i$  تقبل على الأقل سابق بالتطبيق  $f$  في  $E$   $\Leftrightarrow f \in \overline{Y_i}$

كل عنصر من  $F$  يقبل على الأقل سابق بـ  $f$  في  $E$  (أي  $f$  شمولي من  $E$  نحو

$$f \in \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i} \Leftrightarrow (F$$

ومنه عدد التطبيقات الشمولية من  $E$  نحو  $F$  هو  $\text{card} \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i}$

لدينا عدد التطبيقات المعرفة من  $E$  نحو  $F$  هو  $\left(\frac{n}{2}\right)^n$

$$\text{card} \bigcap_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} \overline{Y_i} = \text{card} \overline{\bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i} = \left(\frac{n}{2}\right)^n - \text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i \text{ ومنه}$$

$\varphi \in Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}$  تطبيق من  $E$  نحو  $F - \{y_{i_1}; y_{i_2}; \dots; y_{i_k}\}$

$$\text{card}(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}) = \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \text{ ومنه}$$

$$\text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k < \frac{n}{2}} \text{card}(Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \dots \cap Y_{i_k}) \right)$$

$$\text{card} \bigcup_{i \in \left[1; \frac{n}{2}\right]} Y_i = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^k \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \text{ لدينا } C_{\frac{n}{2}}^k \text{ طريقة لاختيار } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k < \frac{n}{2} \text{ ومنه}$$

$$\text{إذن عدد التطبيقات الشمولية من } E \text{ نحو } F \text{ هو } \left(\frac{n}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^k \left(\frac{n}{2} - k\right)^n$$

لدينا  $C_n^{\frac{n}{2}}$  لاختيار مجموعة  $F$  حيث  $card F = \frac{n}{2}$  ;  $F \subset E$

إذن عدد التطبيقات من  $E$  نحو  $E$  حيث  $card[f(E)] = \frac{n}{2}$  هو  $C_n^{\frac{n}{2}} \left[ \left(\frac{n}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^{k-1} C_n^k \left(\frac{n}{2} - k\right)^n \right]$